

ROUMANIE

Lycée Louis-le-Grand, test pour l'entrée en classe préparatoire
MPSI, session 2009

Durée du test : 4 heures

Les exercices ci-dessous peuvent être abordés dans un ordre quelconque. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice 1 Montrer que le système

$$\begin{cases} x^4 + y^4 &= z^4 \\ x^5 + y^5 &= z^5 \end{cases}$$

n'admet aucune solution $(x, y, z) \in]0, +\infty[^3$.

Solution

Supposons par l'absurde qu'il existe une solution (x, y, z) . Posons $u = x/z$ et $v = y/z$. Le système entraîne que $u^4 + v^4 = 1$ et $u^5 + v^5 = 1$. Donc $0 < u < 1$ et $0 < v < 1$, soit $u^5 + v^5 < u^4 + v^4$: contradiction.

Exercice 2 Résoudre dans \mathbb{R}^* l'équation $xe^x + e^{1/x} = 0$. On remarquera que cette équation admet exactement une racine strictement négative que l'on déterminera.

Solution

Une solution est nécessairement strictement négative. On remarque que $x = -1$ est solution. Montrons que c'est la seule en étudiant l'équation $f(x) = \ln(-x) + x - \frac{1}{x} = 0$ par passage au logarithme dans l'égalité $-xe^x = e^{1/x}$. On a $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} > 0$ par étude du dénominateur comme trinôme du second degré. Donc f admet au plus une racine sur $] -\infty, 0[$. Finalement, la seule solution est -1 .

Exercice 3 a. Montrer que, si 7 ne divise pas l'entier n , alors 7 divise $n^6 - 1$.
b. Déterminer les entiers $n \geq 1$ tels que 7 divise $n^n - 3$.

Solution

a. On calcule n^6 modulo 7 lorsque n est congru à $1, \dots, 6$ modulo 7 et on constate que $n^6 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$. On peut aussi invoquer le théorème de Fermat.

b. Compte tenu de **a**, il suffit de discuter selon les restes modulo 6 et 7 de n . En effet, si $n \equiv m \pmod{6}$ et $n \equiv r \pmod{7}$, on a que

$$n^n = n^{6k+m} = n^{6k} n^m \equiv n^m \equiv r^m \pmod{7}.$$

Résumons ces calculs par le tableau suivant (l'élément à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est le reste de i^j modulo 7) :

	0	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	1	2	4
3	1	3	2	6	4	5
4	1	4	2	1	4	2
5	1	5	4	6	2	3
6	1	6	1	6	1	6

Ainsi, les solutions du problème sont les entiers n vérifiant $\begin{cases} n \equiv 3 \pmod{7} \\ n \equiv 1 \pmod{6} \end{cases}$
ou $\begin{cases} n \equiv 5 \pmod{7} \\ n \equiv 5 \pmod{6} \end{cases}$. Pour résoudre l'un de ces systèmes, il suffit de trouver une solution particulière n_0 puis de remarquer que n est solution du système si et seulement si $n - n_0$ est un multiple de 7 et 6 donc de $7 \times 6 = 42$ (puisque 7 et 6 sont premiers entre eux).

Cherchons désormais des solutions particulières à chacun de ces systèmes. Rappelons que pour obtenir une solution particulière du système diophantien

$$\begin{cases} n \equiv a \pmod{\alpha} \\ n \equiv b \pmod{\beta} \end{cases}$$

connaissant une relation de Bézout $u\alpha + v\beta = 1$ ($a, b, \alpha, \beta, u, v$ sont des entiers), il suffit de considérer $bu\alpha + av\beta$; en effet :

$$bu\alpha + av\beta \equiv av\beta \equiv a(1 - u\alpha) \equiv a \pmod{\alpha}$$

et, de même,

$$bu\alpha + av\beta \equiv bu\alpha \equiv b \pmod{\beta}.$$

Ici, une relation de Bézout est immédiate : $7 - 6 = 1$ (avec les notations précédentes, $\alpha = 7, \beta = 6, u = 1, v = -1$). Des solutions particulières sont donc -11 et 5 respectivement. En conclusion, les entiers solutions sont les entiers congrus à 5 ou -11 modulo 42.

Exercice 4 Soit ABC un triangle. On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. On suppose que $\widehat{BAC} \in]0, \frac{\pi}{3}]$. Montrer que

$$a \leq \max(b, c).$$

Solution

Puisque la somme des angles d'un triangle est π , l'un des deux autres angles est nécessairement supérieur à $\frac{\pi}{3}$. Le côté opposé est donc supérieur ou égal à a , ce qui entraîne que $a \leq \max(b, c)$.

Exercice 5 a. Donner des réels a , b et c tels que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{x(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}.$$

b. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)(k+3)}.$$

Solution

a. On obtient par identification l'égalité

$$\frac{1}{x(x+2)(x+3)} = \frac{1/6}{x} - \frac{1/2}{x+2} + \frac{1/3}{x+3}.$$

b. Posons $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)(k+3)} &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+3} = \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} + \frac{1}{3} \sum_{k=4}^{n+3} \frac{1}{k} = \\ &= \frac{1}{6} H_n - \frac{1}{2} (H_{n+2} - 1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{3} (H_{n+3} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \\ &= \frac{1}{6} H_n - \frac{1}{2} H_{n+2} + \frac{1}{3} H_{n+3} + \frac{5}{36}. \end{aligned}$$

Or, si l'on note $O(\frac{1}{n})$ un terme majoré par $\frac{C}{n}$, on a

$$H_{n+2} = H_n + O(\frac{1}{n}) \text{ et } H_{n+3} = H_n + O(\frac{1}{n}).$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)(k+3)} = \frac{5}{36} + O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{5}{36}.$$

Exercice 6 Soit x et y deux réels positifs ou nuls. Montrer que

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| \leq \sqrt[3]{|x - y|}.$$

Solution

Il n'est pas restrictif de supposer $x = u^3 \geq y = v^3$. Alors

$$\begin{aligned} |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| \leq \sqrt[3]{|x - y|} &\Leftrightarrow u - v \leq \sqrt[3]{u^3 - v^3} \Leftrightarrow (u - v)^3 \leq u^3 - v^3 \\ &\Leftrightarrow -3u^2 + 3uv^2 \leq 0 \Leftrightarrow 3uv(v - u) \leq 0. \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie, la première l'est aussi.

Exercice 7 Soit $P(x) = x^3 - x + 1$.

- a. Montrer que P admet une unique racine réelle, que l'on note α .
- b. Montrer que P admet deux autres racines complexes β et $\gamma = \bar{\beta}$.
- c. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n.$$

Calculer u_0, u_1, u_2 .

d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n appartient à \mathbb{Z} .

e. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \pi \alpha^n$.

Solution

a. On a $P'(x) = 3x^2 - 1$ et donc P' s'annule en $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ainsi, P croît jusqu'à $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, décroît entre $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$, croît après cette valeur. Or $P(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}} > 0$. Donc P ne s'annule pas entre $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Elle admet exactement une racine α entre $-\infty$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Comme $P(-1) = 1$, on a $\alpha < -1$.

b. Le polynôme $P(x)/(x - \alpha)$ est un polynôme réel de degré deux, qui admet donc dans \mathbb{C} deux racines complexes conjuguées β et γ . On peut les calculer (en fonction de α), mais ce n'est pas utile. En revanche, en considérant le terme constant de $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$, on constate que $\alpha\beta\gamma = -1$, donc que $\beta\bar{\beta} = -1/\alpha < 1$. Ainsi, $|\beta| < 1$.

c. À nouveau en identifiant les coefficients du polynôme, on voit que

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \text{ (terme en } x^2 \text{)}$$

et que

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1 \text{ (terme en } x \text{)}$$

Donc $u_0 = 3$, $u_1 = 0$ et

$$u_2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 2.$$

d. Puisque α est racine de P , on a

$$\alpha^3 - \alpha + 1 = 0 \text{ et donc } \alpha^{n+3} - \alpha^{n+1} + \alpha^n = 0$$

(on a multiplié par α^n). On a une égalité analogue relative à β et γ . En additionnant ces relations, on obtient que

$$u_{n+3} - u_{n+1} + u_n = 0.$$

On montre à présent que $u_n \in \mathbb{Z}$. C'est vrai pour $n = 0, 1$ et 2 . Supposons le résultat vrai au rang $n \geq 2$. Alors

$$u_{n+1} = u_{n-1} - u_{n-2} \in \mathbb{Z},$$

ce qui clôt la récurrence.

e. Comme $|\alpha^n| \rightarrow +\infty$, on ne peut voir directement si $\sin \pi \alpha^n$ admet une limite. Cependant, comme $u_n \in \mathbb{Z}$,

$$\sin \pi \alpha^n = \sin \pi (u_n - \beta^n - \gamma^n) = (-1)^{u_n+1} \sin \pi (\beta^n + \gamma^n).$$

On a $|\beta^n + \gamma^n| \leq 2|\beta|^n \rightarrow 0$. Donc $(\sin \pi (\beta^n + \gamma^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle qui tend vers 0. Par conséquent, $\sin \pi (\beta^n + \gamma^n) \rightarrow 0$ et $\sin \pi \alpha^n \rightarrow 0$.

Exercice 8 Donner une primitive de la fonction

$$x \mapsto e^{-x} \sin^2 x.$$

Solution

On a $e^{-x} \sin^2 x = e^{-x} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)$. Posons $I := \int e^{-x} \cos 2x dx$, que l'on primitive par parties :

$$\begin{aligned} I &= \int e^{-x} \cos 2x dx = -e^{-x} \cos 2x - 2 \int e^{-x} \sin 2x dx = \\ &\quad -e^{-x} \cos 2x + 2e^{-x} \sin 2x - 4 \int e^{-x} \cos 2x dx, \end{aligned}$$

donc

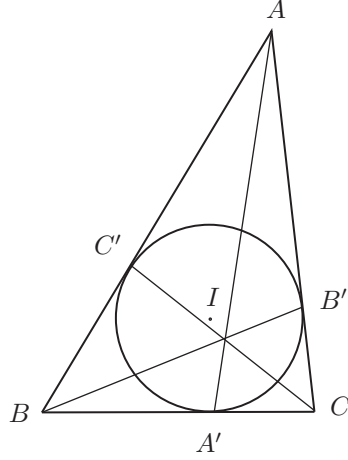
$$5I = e^{-x}(2 \sin 2x - \cos 2x).$$

Finalement,

$$\int e^{-x} \sin^2 x dx = -\frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}I = \frac{1}{10}e^{-x}(\cos 2x - 2 \sin 2x - 5).$$

Exercice 9 Soit ABC un triangle non aplati. Le cercle inscrit à ABC est tangent en A' à $[BC]$, en B' à $[CA]$ et en C' à $[AB]$. Montrer que les trois droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes.

Solution



Soit I le centre du cercle inscrit. C'est le point de concours des bissectrices intérieures.

Le point A' est alors le projeté orthogonal de I sur (BC) , et de même pour les autres. Il est à la distance r de I , lorsque r désigne le rayon de Γ . On note 2α une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'})$ et de même pour les autres. On a alors

$$\frac{r}{AB'} = \frac{r}{AC'} = \tan \alpha ; \quad \frac{r}{BC'} = \frac{r}{BA'} = \tan \beta ; \quad \frac{r}{CA'} = \frac{r}{CB'} = \tan \gamma.$$

et donc

$$\frac{A'B}{A'C} \frac{B'C}{B'A} \frac{C'A}{C'B} = \frac{r^3 \cotan \beta \cotan \gamma \cotan \alpha}{r^3 \cotan \gamma \cotan \alpha \cotan \beta} = 1.$$

Compte tenu des positions de A' , B' et C' sur les segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, on obtient

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Nous allons à présent montrer le théorème de Céva qui affirme que, dans la situation précédente, les trois droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes. Compte tenu de la position des points A' , B' et C' par rapport au triangle ABC , les droites (AA') et (BB') sont concourantes en M . Le point M est barycentre de (A, α) , (B, β) et (C, γ) . Par associativité du barycentre, M est le barycentre de (A, α) et du point A'' qui est lui-même barycentre de (B, β) et (C, γ) . Il en résulte que M est sur la droite (AA'') . Comme A'' appartient à (BC) et à (AA') , c'est que $A'' = A'$ et donc que A' est le barycentre de (B, β) et (C, γ) . Cela s'écrit

$$\beta \overrightarrow{A'B} + \gamma \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0}$$

ou encore, en termes de valeurs algébriques,

$$\beta \overline{A'B} + \gamma \overline{A'C} = 0, \text{ soit encore } \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{\gamma}{\beta}.$$

De même,

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{\alpha}{\gamma}.$$

Donc

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Il en résulte que $\alpha \overrightarrow{C'A} + \beta \overrightarrow{C'B} = \overrightarrow{0}$, donc que C' est le barycentre de (A, α) et (B, β) .

Par conséquent, M est le barycentre de (C, γ) et de $(C', \alpha + \beta)$, donc est sur la droite (CC') : les trois droites sont bien concourantes.

Exercice 10 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que les suites $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n^2 - v_n^4)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées.

Solution

Il existe des réels M et M' , que l'on peut supposer supérieurs à 1, tels que

$$|u_n^2 - v_n^4| \leq M \text{ et } |u_n v_n| \leq M'.$$

La première inégalité s'écrit $|u_n - v_n^2| |u_n + v_n^2| \leq M$. L'un des facteurs est donc moindre que \sqrt{M} . Supposons par exemple que $|u_n - v_n^2| \leq \sqrt{M}$ (pour un n donné).

Posons $A_n := u_n - v_n^2$ et $B_n := u_n v_n$. Alors $u_n = A_n + v_n^2$, de sorte que $v_n^3 = -A_n v_n + B_n$. Il en résulte que, si $|v_n| \geq 1$,

$$|v_n|^3 \leq |v_n|^2 (\sqrt{M} + M'),$$

donc $|v_n| \leq \sqrt{M} + M'$. Cette inégalité est vérifiée aussi lorsque $|v_n| \leq 1$.

Lorsque l'on a $|u_n + v_n^2| \leq \sqrt{M}$, le résultat est analogue. En résumé, pour tout n ,

$$|v_n| \leq \sqrt{M} + M'.$$

Il en résulte bien que la suite (v_n) est bornée. Puisque $|u_n^2 - v_n^4| \leq M$, la suite (u_n) est, elle aussi, bornée.

Exercice 11 On dit qu'une application f de $[1, n]$ vers $[1, 2]$ est une surjection de $[1, n]$ sur $[1, 2]$ lorsque $f([1, n]) = [1, 2]$ (c'est-à-dire que tout élément de $[1, 2]$ est l'image par f d'un élément de $[1, n]$).

Pour $n \geq 2$, déterminer le nombre de surjections de $[1, n]$ sur $[1, 2]$.

Solution

On peut partitionner $[1, n]$ en deux ensembles non vides, dont les éléments du premier s'envoient sur 1 et dont les éléments du second s'envoient sur 2. Une telle partition est déterminée par un ensemble à p éléments, avec $p \in [1, n-1]$, le second en étant alors le complémentaire. Il y a donc

$$\sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} = 2^n - 2$$

possibilités, ce qui est le nombre de surjections cherchées.

Exercice 12

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon_n > 0$ vérifiant la propriété suivante : quels que soient les entiers naturels non nuls k_1, \dots, k_n tels que $\frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_n} < 1$, alors $\frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_n} \leq 1 - \varepsilon_n$.

Solution

Il n'est pas restrictif de supposer que $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$. On procède par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ est évident avec $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons le résultat vrai au rang $n - 1$. Soit k_1, \dots, k_n tels que

$$\frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_n} < 1.$$

Supposons d'abord $k_n \geq \frac{2}{\varepsilon_{n-1}}$. Comme $\frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_{n-1}} < 1$, l'hypothèse de récurrence assure que $\frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_{n-1}} \leq 1 - \varepsilon_{n-1}$, donc que

$$\frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_n} \leq 1 - \frac{\varepsilon_{n-1}}{2}.$$

Si $k_n < \frac{2}{\varepsilon_{n-1}}$, k_n prend ses valeurs dans un ensemble fini. Comme $k_i \leq k_n$, les autres k_i prennent eux aussi leurs valeurs dans un ensemble fini. Par conséquent,

l'ensemble des sommes $\frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_n}$ correspondantes est un ensemble fini, qui contient donc son maximum. Ce maximum est strictement inférieur à 1. Si on le note $1 - \eta_n$ avec $\eta_n > 0$, on voit que

$$\varepsilon_n := \min\left(\frac{\varepsilon_{n-1}}{2}, \eta_n\right)$$

répond à la question.